

Министерство образования, науки и молодежной политики
Республики Коми
Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Сыктывкарский политехнический техникум»

Рассмотрено на ПЦК
Протокол № _____ 20__ г.
от « ____ » _____ 20__ г.

Согласовано:
Зам. директора по УПР
« ____ » _____ 20__ г.

Комплект контрольно-оценочных средств учебной дисциплины

ЕН.01 Математика
основной профессиональной образовательной программы
по специальности СПО
190631-Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Математика: комплект контрольно-оценочных средств по
специальности среднего специального образования 190631-Техническое
обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Разработчик: Панокова Нина Геннадьевна, преподаватель

Содержание

1. Из истории интегрального исчисления	4
2. Неопределенный интеграл, определение, формулы интегрирования	4
3. Основные методы интегрирования	7
4. Определенный интеграл	14
5. Приложения определенного интеграла	16
6. Контрольная работа	20

Из истории интегрального исчисления.

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи, которые мы сейчас относим к задачам на вычисление площадей.

Символ \int введен Г. Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова *summa*). Само слово *интеграл* придумал Я. Бернулли (1690 г.). Вероятно, оно происходит от латинского *integrare*, которое переводится, как *приводить в прежнее состояние, восстанавливать*. В 1696 г. появилось название новой ветви математики – интегральное исчисление (*calculus integralis*), которое ввел И. Бернулли.

Употребляющееся сейчас название *первообразная функция* заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.).

В современной литературе множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется также *неопределенным интегралом*. Это понятие выделил Лейбниц, который заметил, что все первообразные функции отличаются на произвольную постоянную. А $\int_a^b f(x)dx$ называют *определенным интегралом* (обозначение ввел К. Фурье (1768 – 1830), но пределы интегрирования указывал уже Эйлер).

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть $y = F(x)$ имеет производную $y' = f(x)$, тогда ее дифференциал

$$dy = f(x) dx$$

Функция $F(x)$ по отношению к ее дифференциалу $f(x) dx$ называется *первообразной*.

Определение: Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть $F(x)$ - первообразная для дифференциала $f(x) dx$.

Тогда:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x), \text{ где } C - \text{ постоянная.}$$

Определение: совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для дифференциала $f(x) dx$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

Где $f(x) dx$ называется подынтегральным выражением, а C - произвольной постоянной интегрирования.

Например: $\int 2x dx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$.

Процесс нахождения первообразной функции называется **интегрированием**.

Интегрирование - это действие, обратное дифференцированию.

1.1 Свойства неопределенного интеграла

$$1) d \int f(x) dx = f(x) dx,$$

т.е. дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$2) \int dF(x) = F(x) + C,$$

т.е. неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.

3) $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$, где $a = \text{const}$, т.е. постоянную величину можно вынести за знак интеграла.

$$4) \int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx,$$

т.е. интеграл суммы или разности функций равен сумме или разности интегралов.

1.2 Формулы интегрирования

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

$$1. \int dx = x + c$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$11. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$12. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$14. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + c$$

В практике интегрирования часто встречаются интегралы, для нахождения которых можно использовать следующие формулы:

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + c$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + c$$

$$7. \int \frac{dx}{k^2 + n^2 x^2} = \frac{1}{nk} \operatorname{arctg} \frac{n}{k} x + c$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - n^2 x^2}} = \frac{1}{n} \arcsin \frac{n}{k} x + c$$

1.3 Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

При вычислении интегралов вида $\int \sin^{2n} x dx$ или $\int \cos^{2n} x dx$ от четной степени синуса или косинуса используются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

При вычислении интегралов вида $\int \sin^{2n+1} x dx$ или $\int \cos^{2n+1} x dx$ от нечетной степени синуса или косинуса нужно отделить от нечетной степени один

множитель и ввести новую переменную, полагая $\cos x = t$ в первом интеграле и $\sin x = t$ — во втором.

При вычислении интегралов вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ и $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ применяются формулы

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x].$$

1.4 Непосредственное интегрирование.

При непосредственном интегрировании следует пользоваться таблицей интегралов. Интегрируя функции, содержащие переменную в знаменателе дроби или под знаком радикала, нужно вводить степень с отрицательным или дробным показателем, привести подынтегральное выражение к виду какого-либо табличного интеграла.

При интегрировании произведений в ряде случаев полезно предварительно раскрыть скобки.

Примеры:

$$1. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} dx = \int x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{4}{2} - \frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2} + 1}}{\frac{2}{3} + 1} + c = \frac{\frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$2. \int (x+3)(x-2) dx = \int (x^2 + x - 6) dx = \int x^2 dx + \int x dx - 6 \int 1 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

Задания для самостоятельной работы

$$1. \int x^2(1+2x) dx$$

$$2. \int (4x^2 + 4x - 3) dx$$

$$3. \int \sqrt{x^2} dx$$

$$4. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$7. \int x(1-x^2) dx$$

$$8. \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}}$$

$$9. \int \frac{x\sqrt{x} dx}{\sqrt{x^3}}$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x}$$

$$5. \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx$$

$$11. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

$$6. \int 3(2x^2 - 1)^2 dx$$

$$12. \int \left(\frac{3}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt[3]{t^2}}{t} \right) dt$$

1.5 Интегрирование методом подстановки.

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются методом подстановки (методом замены переменной интегрирования).

Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

- 1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;
- 2) найти дифференциал от обеих частей замены;
- 3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);
- 4) найти полученный табличный интеграл;
- 5) сделать обратную замену.

Примеры:

$$1. \text{ Найти интеграл } \int \frac{dx}{\sqrt{(5-3x)^2}}.$$

Решение. Произведем подстановку $5 - 3x = t$, тогда $-3x dx = dt$, откуда $dx = -\frac{1}{3} dt$. Далее получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-3x)^2}} = \int \frac{-\frac{1}{3} dt}{\sqrt{t^2}} = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln |t| + c = -\frac{1}{3} \ln |5-3x| + c$$

$$2. \text{ Найти интеграл } \int (2 + \cos x)^2 \sin x dx.$$

Решение. Сначала положим $2 + \cos x = t$, тогда $-\sin x dx = dt$, откуда $\sin x dx = -dt$. Далее получаем

$$\int (2 + \cos x)^2 \sin x dx = \int t^2 (-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{1}{3} (2 + \cos x)^3 + c.$$

3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{9+4x^2}$.

Решение. Сведем этот интеграл к табличному интегралу $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$. Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \frac{4}{9}x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2}$$

Введем новую переменную $y = \frac{2}{3}x$, тогда $dy = \frac{2}{3}dx$, откуда $dx = \frac{3}{2}dy$.

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{6} \arctg y + c = \frac{1}{6} \arctg \left(\frac{2}{3}x\right) + c.$$

4. Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$.

Заменим $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, получим

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c.$$

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx.$$

В последнем интеграле заменим $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$, тогда получим

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + \sin 2x + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x) \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + \sin 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int \frac{x^2 dx}{(2x^3 - 1)^5}$

2. $\int e^x x^2 dx$

3. $\int (3+5x)^4 dx$

4. $\int \lg x dx$

5. $\int \frac{x^3 dx}{(5x^4 + 3)^5}$

6. $\int x^3 \cos x dx$

7. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

8. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 + \sin x}}$

9. $\int x \sqrt{1+x^2} dx$

10. $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

11. $\int \sqrt{4x^3 + 1} \cdot x^2 dx$

12. $\int \frac{dx}{x \sin^2 \ln x}$

1.6 Интегрирование по частям

Пусть u и v - дифференцируемые функции от x . Тогда

$$d(uv) = u dv + v du,$$

откуда следует

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Принтегрируем обе части этого равенства

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du.$$

Так как $\int d(uv) = uv$, то получаем $\int u dv = uv - \int v du$.

Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является:

- логарифмическая или обратная тригонометрическая функция;
- произведение каждой из этих функций на алгебраическую;
- произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции и др.

Для интегралов вида $\int \ln x dx$, $\int \arctg x dx$, $\int \arcsin x dx$ за u принимается подынтегральная функция, а $dv = dx$.

1. Найти интеграл $\int \ln x dx$.

Пусть $u = \ln x$, тогда $dv = dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Поэтому

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

2. Найдем $\int \arcsin x dx$.

Полагаем $u = \arcsin x$, а $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $v = x$

$$\text{Поэтому } \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

К вновь записанному интегралу применяется подстановка $1-x^2 = z$, которая дает $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$. Поэтому можно записать

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Когда интегрирование по частям применяется к подынтегральной функции, имеющей вид произведения, то выбор множителей u и dv должен соответствовать цели перехода к интегралу $\int v du$, более простому, чем заданный интеграл $\int u dv$, причем множитель dv всегда включающий dx , должен быть легко интегрируемым.

Для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin mx dx$, $\int P(x)\cos mx dx$ за u принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$ за u принимается $\ln x$, $\arctg x$, $\arcsin x$.
Пример. Найти следующие интегралы:

1. $\int (2x-5)e^{-3x} dx$.

Принимаем $u = 2x - 5$ и $dv = e^{-3x}$, тогда $du = 2dx$ $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$.

$$\int (2x-5)e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} - \int \left(-\frac{2}{3}e^{-3x}\right) dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} + \frac{2}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + c = \frac{13-6x}{9}e^{-3x} + c$$

2. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$.

Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$, $v = -\frac{1}{x}$.

По формуле $\int u dv = uv - \int v du$ получим

$$\int \frac{\ln x dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять дважды.

3. $\int x^2 \sin x dx$

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \sin x dx \\ du = 2x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

Снова интегрируем по частям: $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$

В результате получаем окончательный ответ:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c.$$

4. $\int \arctg x dx$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\int xe^x dx$

2. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$

4. $\int x \sin x dx$

5. $\int x \cos 3x dx$

3. $\int \ln^2 x dx$

6. $\int e^x \sin x dx$

1.6 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональной функцией называется дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, числитель и знаменатель которой – многочлены.

Дробь эта называется правильной, если степень числителя ниже степени знаменателя.

Так дробь

$$\frac{x-1}{x^2+3x+5} - \frac{3}{(x+3)^2} - \frac{x^2}{x^3+8} - \text{правильные,}$$

а дробь

$$\frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^2-1}{x^3+1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2-1} - \text{неправильные.}$$

Если требуется проинтегрировать неправильную дробь, то предварительно следует перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

$$\begin{aligned} \text{Так,} \quad \frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{x^3 - x + x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}, \text{ а потому} \\ \int \frac{x^3}{x^2-1} dx &= \int x dx + \int \frac{xdx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1|. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования правильных дробей:

1. *Степень знаменателя равна 1.*

Интеграл $\int \frac{A}{ax+b} dx$ вычисляется непосредственно как интеграл от степенной функции при $n = -1$.

Например: $\int \frac{2}{3x+1} dx = 2 \int \frac{dx}{3x+1} = \frac{2}{3} \int \frac{d(3x+1)}{3x+1} = \frac{2}{3} \ln|3x+1| + c$

2. *Степень знаменателя равна 2,*

т.е. имеем интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{ax^2+bx+c}$.

При $a \neq 1$ делением числителя и знаменателя дроби на a интеграл приводится к виду

$$\int \frac{(mx+n)dx}{x^2+px+q}$$

Здесь различают три случая.

а) $\frac{p^2}{4} - q = 0$, т.е. корни знаменателя действительные и равные.

Тогда $x^2 + px + q = (x - x_1)^2$, и интеграл приводится к виду $\int \frac{mx + n}{(x - x_1)^2} dx$.

Этот интеграл вычисляется подстановкой $x - x_1 = t$.

б) $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. корни трехчлена мнимые.

В этом случае подынтегральная функция разбивается на два слагаемых, причем в первом из них числитель выделяется в виде половины производной знаменателя, а во втором знаменатель приводится к сумме квадратов:

$$\frac{(mx + n)}{x^2 + px + q} = \frac{m\left(x + \frac{p}{2}\right) + n - \frac{mp}{2}}{x^2 + px + q} = \frac{m\left(x + \frac{p}{2}\right)}{x^2 + px + q} + \frac{n - \frac{mp}{2}}{x^2 + px + q}.$$

Этим заданный интеграл разбивается на два.

в) $\frac{p^2}{4} - q > 0$; корни трехчлена действительные различные. Тогда

$$\frac{(mx + n)}{x^2 + px + q} = \frac{(mx + n)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{mx + n}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$\frac{(mx + n)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

и полученная дробь раскладывается на две простейшие:

Числители этих дробей находятся методом неопределенных коэффициентов.

После приведения правой части к общему знаменателю имеем

$$\frac{mx + n}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Сравнение числителей дает $A(x - x_2) + B(x - x_1) = mx + n$.

При $x = x_1$ определяем A и при $x = x_2$ определяем B .

Задания для самостоятельной работы

1. $\int \frac{6x dx}{(x^2 + 1)^2}$

2. $\int \frac{2 dx}{x^2}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 5x}$

4. $\int \frac{2x + 5}{x^2 - 6x + 9} dx$

2. Определенный интеграл

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется определенным интегралом,

и обозначается: $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, эта формула Ньютона-Лейбница

a — нижний предел интеграла,

b — верхний предел интеграла.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ нужно найти

соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Например

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = 2\frac{2}{3}$$

2.1 Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$, где C — постоянная

2. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx$

3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Пример 1. Вычислить интеграл методом непосредственного интегрирования:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \left[\frac{\pi}{4} - \cos x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

Пример 2. Вычислить интеграл методом подстановки:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{-x}} = -\int_0^7 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{t} \Big|_0^7 = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{7} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{7}$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^4 x \ln x dx = \left| \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right|_0^4 = \frac{16}{2} \ln 4 - \frac{16}{4} = 8 \ln 4 - 4 = 8 \ln 4 - 4 = \frac{8 \ln 4 - 4}{1}$$

Задания для самостоятельной работы

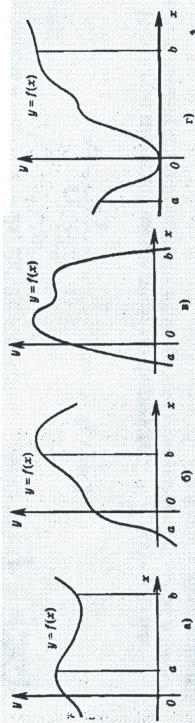
- $\int_0^2 (2-x)^2 dx$
- $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{x^4 + 16x^2} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$
- $\int_2^4 \frac{x dx}{(x^2 - 1)^3}$
- $\int_0^4 (2\sqrt{x} - x^2) dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(3 - \sin x)^2}$
- $\int_1^2 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$
- $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-7x^3}}$
- $\int_{-1}^1 (5-x-3x^2) dx$
- $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5 + 4}}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$
- $\int_0^{\sqrt{5}} x \sqrt{25-3x^2} dx$
- $\int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
- $\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$
- $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3} dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$
- $\int_{-1}^1 (x^2 - 2) dx$
- $\int_0^2 \frac{x dx}{(2x^2 + 4)^4}$
- $\int_0^1 (e^x + x) dx$
- $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+2x^3}}$

3. Приложения определенного интеграла Вычисление площадей

Фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми, перпендикулярными к оси абсцисс, называется **криволинейной трапецией**. Отрезок $[a; b]$ называется основанием криволинейной трапеции. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках а-з.

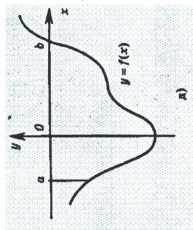
Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



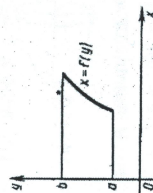
Если фигура, расположенная под осью OX , т.е. $f(x) < 0$, является криволинейной трапецией. То ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$, прямыми $y = a$, $y = b$ и осью OY , то ее площадь вычисляется по формуле

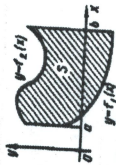
$$S = \int_a^b f(y) dy$$



Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций

$y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (где $a \leq x \leq b$) и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Для этого

решим систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\text{Имеем } 4 - x^2 = x^2 - 2x, 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Искомую площадь вычисляем по формуле $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = 4 \int_{-1}^2 dx - 2 \int_{-1}^2 x^2 dx + 2 \int_{-1}^2 x dx = \\ &= 4x \Big|_{-1}^2 - 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9 \end{aligned}$$

$$S = 9 \text{ кв.ед.}$$

Задания для самостоятельной работы

Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $y = 8x - x^2 - 7$ и осью OX

2. $y = x^3 - 1, y = 0, x = 0$

3. $y = x^2 - 3x - 4$ и осью OX

4. $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$

5. $y = 5x - x^2 + 6$ и осью OX

6. $y = x^3, y = x^2, x = -1, x = 0$

7. $y = x^2 - 6x + 8$ и осью OX

8. $y = x^2$ и $y = x + 2$

9. $y = x^2 - 4x - 5$ и осью OX

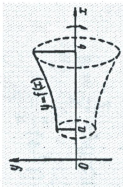
10. $y = 6x - 3x^2$ и осью OX

Вычисление объема тела вращения

Телом вращения называется тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг её основания.

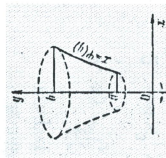
Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ (где $a \leq x \leq b$), отрезком ab оси OX и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Если основание криволинейной трапеции лежит на оси ординат ($a < b$), то объем тела вращения вычисляется по формуле

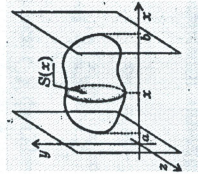
$$V = \pi \int_a^b \varphi^2(y) dy$$



Объем тела, заключенного между двумя перпендикулярными к оси X плоскостями $x = a$ и $x = b$:

$$V = \int_a^b S(x) dx, \text{ где } S(x) - \text{площадь}$$

сечения плоскостью, проходящей через точку $x \in [a; b]$ и перпендикулярной к оси X .

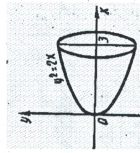


Пример 1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x$, прямой $x = 3$ и осью OX .

Решение: Применяя формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

$$V = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(9 - 0) = 9\pi$$

$$V = 9\pi \text{ куб.ед.}$$



Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 2$.

Решение: объем полученного тела (оно называется параболоидом)

вычислим по формуле $V = \pi \int_a^b \varphi^2(y) dy$.

$$V = \pi \int_1^2 (y-1) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^2 = \pi \left(\frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2} (4-1) - \pi(2-1) = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

$V = \frac{\pi}{2}$ куб.ед.

Задания для самостоятельной работы

Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $xy = 1, x = 2, x = 3, y = 0$
2. $y = x^3, y = 0, x = 0, x = 2$
3. $y^2 - 3x = 0$ и $x - 3 = 0$
4. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x - 3 = 0, x = 0$

Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной данными линиями:

1. $y = x^2 + 1, y = 2, y = 5$
2. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, y = 2, y = 0$

Применения определенного интеграла к решению физических задач.

Путь, пройденный точкой.

Если точка движется прямолинейно и ее скорость $v = f(t)$ есть известная функция времени t , то путь, пройденный точкой за промежуток времени

$$t_1 \leq t \leq t_2, \text{ вычисляется по формуле } S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

Пример:

Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v = (4t - t^2)$ (v — в м/с).

Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение.

В момент остановки скорость движения тела равна нулю, т. е. $4t - t^2 = 0$, $t(4 - t) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

Итак, тело остановится через 4 с.

Путь, пройденный телом за это время, вычисляем по формуле: $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$

$$S = \int_0^4 (4t - t^2) dt = 4 \int_0^4 t dt - \int_0^4 t^2 dt = 4 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^4 - \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^4 = 2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 64 = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ (м)}.$$

Задание для самостоятельной работы

Тело движется прямолинейно со скоростью $v = (2 + 4t^3)$ (v — в м/с).

Вычислите путь, пройденный телом за первые три секунды.

Контрольная работа

1. Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int (4x^2 + 4x - 3) dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5 - 2t^3}}$
4. $\int \frac{1 - 6x + 4x^2}{x^2} dx$
5. $\int 3^{2x^2} x dx$
6. $\int \frac{5 - \sqrt[3]{x^2}}{x} dx$
7. $\int x \cdot 2^x dx$
8. $\int \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
9. $\int \sqrt[3]{(2 - \sin x)^3} \cos x dx$
10. $\int \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x} + 5e^x \right) dx$
11. $\int \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{x^3/x^2} dx$
16. $\int \frac{x dx}{2\sqrt{x}}$
17. $\int (3x^5 - \cos x - 1) dx$
18. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx$
19. $\int (2^x - 3e^x + x) dx$
20. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt{x}} dx$
21. $\int \left(\frac{1}{5\cos^2 x} - \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) dx$
22. $\int \frac{3x^2 dx}{(2 - x^3)^4}$
23. $\int \left(2 - \frac{1}{3\sin^2 x} - x^2 \right) dx$
24. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x\sqrt{x}} dx$
25. $\int (5^x - 1)(5^{-x} + 1) dx$
26. $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$

$$27. \int \cos^4 x \sin x dx$$

$$12. \int \frac{x\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

$$28. \int \frac{7+2x\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$13. \int \left(9x^8 - 3e^x + \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$29. \int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$$

$$14. \int (3x^3 - 4)^2 x^2 dx$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^3}}$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$$

2. Найдите определенные интегралы:

$$1. \int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt{x^2}} \right) dx$$

$$16. \int_6^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 36}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \cos x dx$$

$$17. \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

$$3. \int_0^2 \frac{4x dx}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$18. \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4 + 16} \cdot x^3 dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(2 - \cos x)^2}$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$$

$$5. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$20. \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

$$6. \int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$$

$$21. \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x}) dx$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$$

$$22. \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} (4+6x)^2 dx$$

$$8. \int_0^4 (1-\sqrt{x})^3 dx$$

$$23. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin x)^3 \cos x dx$$

$$24. \int_0^1 (5-2x^3)^2 dx$$

$$10. \int_1^2 \frac{1-x^6}{x^5} dx$$

$$25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4+5\sin x} \cos x dx$$

$$11. \int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$26. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[4]{(1+15x^2)^3}}$$

$$27. \int_1^3 2e^{2x} dx$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{(8-7\sin x)^2}}$$

$$28. \int_1^9 \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$13. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{7x^3+1}}$$

$$29. \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) dx$$

$$30. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$15. \int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$$

3. Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y = 3x - 1, y = 0, x = 2, x = 4$$

$$2) x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$$

$$3) y = -\frac{1}{3}x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 3$$

$$4) y = 9 - x^2, y = 0$$

$$5) y = 4x - x^2, y = 0$$

$$6) y = x^2 - 2x + 3, y = 0, x = 0, x = 3$$

$$7) y = x^2, 5x - y - 6 = 0$$

$$8) y = x^2, x = y^2$$

$$9) y = \frac{1}{4}x^2, y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$10) y = -x^2 + 6, y = 2x + 3$$

4. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y^2 = 6x, y = 0, x = 1, x = 3$$

$$2) y^2 = 4(x-2), y = 0, x = 3, x = 6$$

$$3) y = x^2 - 4, x = 0$$

$$4) y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi$$

$$5) y^2 = 4x, y = x$$

$$6) y = 4 - x^2, x - y + 2 = 0$$

5. Сделайте чертеж и вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной данными линиями:

$$1) y = x^2, y = 1, y = 4, x = 0$$

$$2) y = x^2 + 1, y = 5$$

$$3) y^2 = 9x, y = 3x$$

$$4) y^2 = 2x, 2x + 2y - 3 = 0$$